数理解析研究所講究録
146巻 1972年 177-189

Ⓗ-kernels in axiomatic potential theory

早大理工　郡 敏昭

R. Naim は Green space の Martin compact 化の上にⒽ-核を導入し 非負優調和函数の Martin 境界の近くでのふるまいを記述した。それは非負優調和函数の法線微分（境界での）をⒽ-核により表現することであった。この論文では adjoint の定義される公理的ポテンシャル論（Brelot-Herve）に対し Naim の結果を拡張する。したがってⒽ-核は非対称になる。また Green の公式を証明する。

§1　Martin 境界, adjoint Martin 境界

最初に minimal full harmonic 構造を説明する。これを考えなくともできるが 考えた方が見通しがよい。

$(X, \mathcal{H})$ を Brelot の公理1, 2, 3 をみたす可算基をもった調和空間としよう。また (4) X 上の potential >0 の存在 および(5)同一の点を support とする potential が互に比例すること を仮定しよう。このとき,

各 $y \in X$ に対し $\{y\}$ を support とする potential on X

$P_y(\cdot)$ で $(x, y) \longrightarrow P_y(x)$ が下半連続，$x \neq y$ で連続 となるものが存在する。（Herve）

境界 ∂G が compact な開集合 G と ∂G 上の函数 f に対し

$$\overline{H}^G f = \inf \left\{ s \text{ superharmonic on } G, \begin{array}{l} \liminf\limits_{G \ni x \to y} s(x) \geqq f(y), \quad \forall y \in \partial G \\ \qquad\qquad\qquad > -\infty \\ \liminf\limits_{G \ni x \to (\infty)} s(x) \geqq 0 \end{array} \right\}$$

とおく。P. Loeb により次のことがわかる。

(i) $\forall f \in C(\partial G)$ に対し $\overline{H}^G f$ は G 上で調和であり $\overline{H}^G f = -\overline{H}^G(-f)$，すなわち f は resolutive。

(ii) 外から regular なコンパクト集合 K，すなわち

$$\lim_{X-K \ni x \to y} \overline{H}^{X-K} f(x) = f(y) \quad \forall y \in \partial K$$

となるコンパクト集合 K が十分に多く存在する。

$\mathfrak{D}$ で境界 ∂D がコンパクトな相対コンパクトでない領域 D の全体をあらわそう。$D \in \mathfrak{D}$ に対し

$$\widetilde{\mathcal{H}}^0(D) = \left\{ h : D \text{ 上で調和}, \begin{array}{l} \exists K \text{ 外から regular な compact} \\ X-K \subset D, \\ h = \overline{H}^{X-K}[h/\partial K] \quad \text{on } X-K \end{array} \right\}$$

を D 上の full harmonic fn. とする full harmonic 構造 $\widetilde{\mathcal{H}}^0$ が存在する。（数理研講究録 112，郡 minimal f. h. structure）

$x \to P_y(x) \in \widetilde{\mathcal{H}}^0(X - \{y\})$ がわかる。

$x_0 \in X$を一つ固定する。x_0のある近傍の外では $1/p_{x_0}(\cdot)$ に等しい連続函数を 同じ記号 $1/p_{x_0}(\cdot)$ で書いても誤解はないであろう。

$$Q = \left\{ \frac{h(\cdot)}{p_{x_0}(\cdot)} \;;\; h \in C(X),\ \exists K = K_h \text{ compact},\ h \in \widetilde{\mathcal{H}}^0(X-K) \right\}$$

とおく。$Y^* = X \cup \Delta^*$ を X の Q-compact 化としよう。$x \to k_x^*(y) = p_y(x)/p_{x_0}(x)$ は $Y^* - \{y\}$ 上に連続に拡張されるので、それを $k_\alpha^*(y)$ と書こう、$\alpha \in Y^* - \{y\}$。Δ^*をadjoint Martin境界という。

adjoint harmonic fn を導こう。

仮定(6) relatively compact open set ωは ω上で調和となる任意の potential p に対し

$$R^{X-G}p \equiv \inf\{s \geq 0.\ \text{superharm. on } X,\ s \geq p \text{ on } X-G\} = p$$

となるとき completely determinant (c.d.)-set という。c.d-set よりなるXの基が存在する。

仮定(7) $X \ni \forall x$ は polar set

この仮定より adjoint harmonic function の sheaf が導入される。すなわち G open, $y \in G$ に対し

$\hat{R}^{X-G}p_y(\cdot) \equiv R^{X-G}p_y$ の lower semi conti regularization は $G \cup (X-\overline{G})$ で harmonic な potential だから ∂G 上の Radon measure として $\int_{\partial G} p_z(\cdot)\,\sigma_y^G(dz)$ と表現されるが、

定義

G 上の函数 h^* が $*$-harmonic（その全体を $\mathcal{H}_G^*$）

$\Leftrightarrow$ (1) $h^* \in C(G)$

(2) $\forall \omega$ c.d set $\overline{\omega} \subset G$, $\forall y \in \omega$ に対し

$$h^*(y) = \int h^*(z)\, d\sigma_y^\omega(z)$$

とおくのである。

$(X, \mathcal{H}^*)$ は仮定(4).(5)を adjoint に言いなおしたものをみたす Brelot の調和空間になる。

公式. $(\hat{R}^A p_y)(x) = (\hat{R}^{*A} p_x^*)(y)$ (Hervé)

は重要である。ここに $p_x^*(y) \equiv p_y(x)$ は y の函数として $*$-potential with support $\{x\}$, $\hat{R}^{*A}\varphi = \widehat{\inf}\{s^* \geq 0,\ *$-superharm. on X, $s^* \geq \varphi$ on $A\}$。

これまでに述べたことはすべて $*$ をつけて言いかえられる。$*$-minimal full harmonic 函数を $\tilde{\mathcal{H}}^{*0}(G)$ であらわそう。

$p_x^*(\cdot) \in \tilde{\mathcal{H}}^{*0}(X - \{x\})$。

$Y = X \cup \Delta$ で

$$\left\{ \frac{h^*(\cdot)}{p_{x_0}^*(\cdot)} \ ;\ h^* \in C(X),\ \exists K \text{ compact}\ h \in \tilde{\mathcal{H}}^{0*}(X \setminus K) \right\}$$

によるコンパクト化をあらわし $y \to k_y(x) = p_y(x)/p_y(x_0)$ を $Y - \{x\}$ 上に連続に拡張した函数を $k_\xi(x)$, $\xi \in Y - \{x\}$, と書く。Δ を Martin 境界という。

$k^*_\alpha(\cdot) \in \mathcal{H}^*(X)$, $k_\xi(\cdot) \in \mathcal{H}(X)$ $(\alpha\in\Delta^*, \xi\in\Delta)$ がわかる。このΔが Kori, Axiomatic theory of non-negative fullsuperharm fns §7 を full harm. 構造 $\tilde{\mathcal{H}}^c$ に適用して得られるものと同じであることはすぐわかる。したがって非負 superharm. fn (= 非負 minimal ~~super~~ full superhar fn) の cone のある compact base $\mathcal{K}$ に対し, ($P_y(\cdot)$ は $P_y(\cdot)\in\mathcal{K}$ と normalize して),

$$\begin{array}{ccc} \{h \in \mathcal{K}\cap\mathcal{H}(X),\ h \text{ は extremal}\} & \subset & \overline{\{P_y(\cdot),\ y\in X\}} \\ \wr\!| & & \wr\!|\ (\text{homeo.}) \\ \Delta_1 & \subset & \Delta \end{array}$$

となる。ここに ―― は上の cone の中での閉包。Δ_1を minimal Martin boundary という。非負調和函数が核 $k_\xi(\cdot)$ と Δ_1上の Radon measure で一意的に表現されることは言うまでもないだろう。同じことが*についても言える。Δ_1^* と書く。

§2 thin sets at boundary points

X 上の measure ≥0 の K-potential $u(\xi) = \int k_\xi(x)\mu(dx)$, $\xi\in Y$, を考える。

<u>定義</u> $E\subset X$ が $\xi\in\Delta$ で thin

$\Longleftrightarrow$ $\exists u$: K-potential

$$\liminf_{E\ni y\to\xi} u(y) > u(\xi)$$

Lemma 2.1, u, u' を二つの k-potential とする。

$u \geqq u'$ on X $\Rightarrow$ $u \geqq u'$ on Y

証. u, u' を測度 ν, ν' の k-potential とする。コンパクト集合 K と $\xi \in \Delta$ に対し ∂K 上の測度 ρ^K_ξ を

$$\hat{R}^K k_\xi = \int k_z(\cdot)\, \rho^K_\xi(dz)$$

により定める。

$$\int \hat{R}^K k_\xi(x)\,\nu(dx) = \int u(z)\,\rho^K_\xi(dz) \geqq \int u'(z)\,\rho^K_\xi(dz)$$
$$= \int \hat{R}^K k_\xi(x)\,\nu'(dx)\ 。$$

$K \uparrow X$ として $u(\xi) \geqq u'(\xi)$。

Lemma 2.2. U 開集合 $\subset X$。$R^U p_y(x) = R^{*U} p^*_x(y)$ は y の函数として $*$-potential だから $= \int p_y(t)\,\mu_0(dt)$ と書けるが, $R^U k_\xi(x) = \int k_\xi(t)\,\mu_0(dt)$, $\forall \xi \in Y$, が成り立つ。

証 $R^U \hat{R}^K k_\xi(x) = \int \hat{R}^K k_\xi(t)\,\mu_0(dt)$ を言えば, $K \uparrow X$ として証明される。$\hat{R}^K k_\xi = \int p_z(\cdot)\,\nu^K_\xi(dz)$ としよう。ν^K_ξ は ∂K 上の測度である。U open より $R^U \hat{R}^K k_\xi(x)$
$= \int R^U p_z(x)\,\nu^K_\xi(dz) = \iint p_z(t)\,\mu_0(dt)\,\nu^K_\xi(dz) = \int \hat{R}^K k_\xi(t)\,\mu_0(dt)$ 。

Proposition 2.3 $E \subset X$.

E thin at $\xi_0 \in \Delta \Leftrightarrow \exists \delta$, ξ_0 の近傍, で $\hat{R}^{E\cap\delta} k_{\xi_0} \neq k_{\xi_0}$ 。

証　E thin at $\xi_0\in\Delta$ としよう。E open としてよい。定義より ξ_0 の近傍 δ で，ある K-potential $u=\int k_{\cdot}(x)\nu(dx)$ に対し $u(y)>\gamma$, $\forall y\in E\cap\delta$ となるものがある．但し
$u(\xi_0)<\gamma<\liminf\limits_{E\ni y\neq\xi_0} u(y)$。　$p_y(x_0)\,u(y)=\int p_x^*(y)\,\nu(dx)$
なる $*$-potential は $E\cap\delta$ の上で $>\gamma\, p_y(x_0)$ だから，
$\gamma\,\hat{R}^{E\cap\delta}p_y(x_0)=\gamma\,\hat{R}^{E\cap\delta}p^*_{x_0}(y)\leqq p_y(x_0)\,u(y)$ となる。
この左辺は $*$-potential だから $\int p_x^*(y)\mu_0(dx)$ と書けるが
μ_0 の K-potential $V(\xi)=\int k_\xi(x)\mu_0(dx)$ は Lemma 2.2 より
$\gamma\,\hat{R}^{E\cap\delta}k_\xi(x_0)$ に等しい。今見たように X 上では $V(y)\leqq u(y)$ だから Lemma 2.1 より $V(\xi)\leqq u(\xi)$。とくに $\xi=\xi_0$ として $\hat{R}^{E\cap\delta}k_{\xi_0}(x_0)\leqq\frac{1}{\gamma}u(\xi_0)<1=k_{\xi_0}(x_0)$。

逆に $\hat{R}^{E\cap\delta}k_{\xi_0}(z_0)<k_{\xi_0}(z_0)$, $\exists z_0\in X$, としよう。
z_0 における point mass を $E\cap\delta$ に掃散した測度を μ と書こう。
すなわち $\hat{R}^{E\cap\delta}p(z_0)=\int p(x)\,d\mu(x)$, $\forall p$ 非負 superharm. fn.
polar set e が存在し $\hat{R}^{E\cap\delta}k_y(z_0)=k_y(z_0)$, $\forall y\in E\cap\delta-e$ が成り立つ。したがって K-potential $u(\xi)=\int k_\xi(x)\,d\mu(x)$ を考えると $\liminf\limits_{E\cap\delta-e\ni y\neq\xi_0} u(y)=\liminf k_y(z_0)=k_{\xi_0}(z_0)$
$>\hat{R}^{E\cap\delta}k_{\xi_0}(z_0)=u(\xi_0)$ が成りたつ $E\cap\delta-e$ は ξ_0 で thin。したがって $E\cap\delta$ も ξ_0 で thin。

この Proposition より良く知られた方法 (Naim) から次のことがわかる。

定理2.4

$\Delta_1 = \{\xi \in \Delta,\ X \text{ is not thin at } \xi\}$

したがって $\xi \in \Delta_1$ なら

$$\int k_\xi(x)\nu(dx) = \liminf_{X \ni y \to \xi} \int k_y(x)\nu(dx).$$

次の criterion も知られている。

定理2.5 (Gowrisankaran, (Ann. Inst. Fourier))

$\xi \in \Delta_1$, $E \subset X$

E thin at $\xi \iff R^E k_\xi \neq k_\xi$

<u>定義</u> $\xi \in \Delta_1$ の neighborhood filter を

$$\mathcal{F}_\xi = \{E \subset X,\ R^{X-E} k_\xi \neq k_\xi\}$$

として定義する。$\operatorname{limit}_{\mathcal{F}_\xi} f$ を $x \to \xi$ の際の $f(x)$ の fine limit という。

この§の結果はすべて adjoint に対しても述べられる。

§3 Θ-kernels, $\Theta(\alpha, \xi)$, $\alpha \in Y^*$, $\xi \in Y$。

$\hat{R}^K k_\xi(x)$, $\xi \in \Delta$, は $X-K$ で $\tilde{\mathcal{H}}^0(X-K)$ に属するから ~~Y^*-K 上の連続函数に拡張される。~~ $\frac{1}{k_{x_0}(x)} \hat{R}^K k_\xi(x)$ は Y^*-K 上の連続函数に拡張される。それを $\Theta^K(\alpha, \xi)$ と書

こう, $\alpha \in Y^* - K$。 $\alpha \in \Delta^*$, $\xi \in Y$ に対し $\Theta^K(\alpha, \xi)$ は K とともに増加するから $\Theta(\alpha, \xi) = \lim_{K\uparrow} \uparrow \Theta^K(\alpha, \xi)$ と定義しよう。 $x \in X$, $\xi \in Y$ に対して $\Theta(x, \xi) = \frac{1}{p_{x_0}(x)} k_\xi(x)$ と置く。勿論 $\Theta(x, \xi) = \lim_{K\uparrow} \frac{1}{p_{x_0}(x)} \Theta^K(x, \xi)$,
[$\Theta^K(x, \xi) = \frac{1}{p_{x_0}(x)} \hat{\mathcal{R}}^K k_\xi(x) = \frac{1}{p_{x_0}(x)} k_\xi(x)$, $x \in \mathring{K}$ 。]

上と adjoint に $\alpha \in Y^*$ に対し $\frac{1}{p_y(x_0)} \hat{\mathcal{R}}^{*K} k^*_\alpha(y)$ の $y \to \xi \in \Delta$ なる連続拡張として $\Theta^{*K}(\alpha, \xi)$ を定義する。$\alpha \in Y^*$, $y \in X$ に対し $\Theta^{*K}(\alpha, y) = \frac{1}{p_y(x_0)} \hat{\mathcal{R}}^{*K} k^*_\alpha(y)$ としておく。

Lemma 3.1.

$$\Theta(\alpha, y) = \lim_{K\uparrow} \uparrow \Theta^{*K}(\alpha, y) \quad , \forall \alpha \in Y^*, y \in X。$$

証. 右辺は $K \uparrow X$ に対し $\frac{1}{p_y(x_0)} k^*_\alpha(y)$ に増加するから $\Theta^K(\alpha, y) \longrightarrow \frac{1}{p_y(x_0)} k^*_\alpha(y)$, $K \uparrow X$, を言えばよい。$\alpha \in X$ ならこれはともに $\frac{1}{p_y(x_0)} \frac{1}{p_{x_0}(x)} p_y(x)$ に等しく自明。 $\alpha \in \Delta^*$ とする。$\hat{\mathcal{R}}^K k_\xi(x) = \int_{\partial K} p_y(x) \nu^K_\xi(dy)$ として $\Theta^K(\alpha, y) = \int_{\partial K} k^*_\alpha(z) \nu^K_y(dz)$ だから $\nu^K_y(dz) \longrightarrow \frac{1}{p_y(x_0)} \delta_{\{y\}}(dz)$, vaguely, を言えばよい。($k^*_\alpha(\cdot)$ は conti)。任意の support compact な連続函数は連続な $*$-potential の差で一様に近似されるから $*$-potential $u^* = \int p^*_x\, m(dx)$ に対して

$$\int u^*(z) \nu^K_y(dz) \longrightarrow \frac{1}{p_y(x_0)} u^*(y)$$ を言えばよい。

$$\int u^*(z)\,\nu_y^K(dz) = \int m(dx)\int p_z(x)\,\nu_y^K(dz) = \int m(dx)\,\hat{R}^K k_y(x)$$
$$\longrightarrow \int m(dx)\,k_y(x) = \frac{1}{p_y(x_0)}\,u^*(y)\text{。}$$

$$\Theta^*(\alpha,\xi) \begin{cases} = \lim_{K\uparrow}\uparrow \Theta^{*K}(\alpha,\xi), & \alpha\in Y^*,\ \xi\in\Delta \\ = \dfrac{1}{p_y(x_0)}\,k_\alpha^*(y) & \alpha\in Y^*,\ y\in X \end{cases}$$

と置くと Lemma 3.1 を adjoint にした $\Theta^*(x,\xi)=\lim\Theta^K(x,\xi)$ が成り立つ。すなわち $\Theta^*(x,\xi)=\Theta(x,\xi)$, $\Theta(\alpha,y)=\Theta^*(\alpha,y)$, $\alpha\in Y^*$, $\xi\in Y$, $x,y\in X$。

$\alpha\in X\cup\Delta_1^*$, $\xi\in X\cup\Delta_1$ に対し $\Theta(\alpha,\xi)=\Theta^*(\alpha,\xi)$ を示そう。

Y^* 上の測度 μ に対し $\xi\in Y$ の函数 $u(\xi)=\int\Theta(\alpha,\xi)\mu(d\alpha)$ を μ の Θ-potential と言おう。($\Theta(\alpha,\xi)$ は α の下半連続函数である。) 二つの Θ-potential u, u' に対し $u\geq u'$ on $X \Rightarrow u\geq u'$ on Y となることは Lemma 2.1 と同様である。また Lemma 2.2 と同様にして，開集合 U に対し

$\hat{R}^U p_y(x)=\int_X k_t^*(y)\nu_0(dt)$ と書くと $\hat{R}^U k_\xi(x)=\int_X\Theta(t,\xi)\nu_0(dt)$

がわかる。したがって Proposition 2.3 の証明より

Proposition 3.2, $E\subset X$, $\xi\in\Delta$.

E は ξ で not thin $\Rightarrow \forall u$, Θ-potential に対し
$$u(\xi)=\liminf_{E\ni y\to\xi} u(y)\text{。}$$

Corollary 3.3　$\xi \in \Delta_1$ に対し

$$\Theta(\alpha, \xi) = \liminf_{X \ni y \neq \xi} \Theta(\alpha, y), \quad \forall \alpha \in Y^*。$$

adjoint の命題として

$\alpha \in \Delta_1^*$ に対し

$$\Theta^*(\alpha, \xi) = \liminf_{X \ni x \neq \alpha} \Theta^*(x, \xi), \quad \forall \xi \in Y, \text{ したがって}$$

$$= \liminf_{X \ni x \neq \alpha} \Theta(x, \xi), \quad \forall \xi \in Y。$$

Proposition 3.4　$\xi \in X \cup \Delta_1$, $\alpha \in X \cup \Delta_1^*$

なら　$\Theta(\alpha, \xi) = \Theta^*(\alpha, \xi)$。

証　上に述べたことと $\alpha \longrightarrow \Theta(\alpha, \xi)$ が下半連続，$\xi \longrightarrow \Theta^*(\alpha, \xi)$ が下半連続なことを使えばよい。

§4. 境界における法線微分，Green の公式.

定理 4.1.

(1) 非負 superharmonic 函数 $u = \int_{X \cup \Delta_1} k_\xi \, \mu(d\xi)$ に対し，

$$\exists\ *\text{-fine}\lim_{X \ni x \to \eta} \frac{u(x)}{p_{x_0}(x)} = \liminf_{X \ni x \to \eta} \frac{u}{p_{x_0}}(x)$$

$$= \int_{X \cup \Delta_1} \Theta(\eta, \xi) \mu(d\xi), \quad \eta \in \Delta_1^*。$$

(2) $*$-superharmonic 函数 ≥ 0 ; $u^* = \int_{X \cup \Delta_1^*} k_\alpha^* \mu^*(d\alpha)$ に対し,

$$\exists \text{ fine limit}_{X \ni y \to \xi} \frac{u^*}{p_{x_0}^*}(y) = \liminf_{X \ni y \to \xi} \frac{u^*}{p_{x_0}^*}(y)$$

$$= \int_{X \cup \Delta_1^*} \Theta(\alpha, \xi) \mu^*(d\alpha), \quad \xi \in \Delta_1 \text{。}$$

証明 (2)

$\Lambda = \liminf_{X \ni y \to \xi} \frac{u^*(y)}{k_y(x_0)}$ とおく。 $\Lambda < \infty$ としてよい。

Dを $x_0 \in \mathring{K} \subset K$ なるコンパクト集合の補集合とする。

$E = \{ y \in X \quad , \quad u^*(y) > (\Lambda + \varepsilon) p_{x_0}^*(y) \}$ とする。

$E \cap D$は開集合。 さて $E \cap D$ 上で $u^* > (\Lambda + \varepsilon) p_{x_0}^*$ だから $\hat{\mathcal{R}}^{*E\cap D} p_{x_0}^* \leq \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} u^*$, この両辺は Θ-potential である。すなわち $\hat{\mathcal{R}}^{*E\cap D} p_{x_0}^*(y) = \int_{X \cup \Delta_1^*} k_\alpha^*(y) \lambda(d\alpha)$ と書くなら (実は ~~sup~~ λ は X 上の測度だが)

$$\int \Theta(\alpha, y) \lambda(d\alpha) \leq \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \int_{X \cup \Delta_1^*} \Theta(\alpha, y) \mu^*(d\alpha)$$

, $\forall y \in X$, が成り立つ。

これは $Y \ni \forall \xi$ に対し正しいから

$$\hat{\mathcal{R}}^{E \cap D} k_\xi (x_0) = \int \Theta(\alpha, \xi) \lambda(d\alpha) \leq \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \int_{X \cup \Delta_1^*} \Theta(\alpha, \xi) \mu^*(d\alpha)$$

を得る。 $\xi \in \Delta$ が minimal なら

$$\text{右辺} = \liminf_{X \ni y \to \xi} \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \int_{X \cup \Delta_1^*} \Theta(\alpha, y) \mu^*(d\alpha) = \frac{\Lambda}{\Lambda + \varepsilon} < 1$$

$= k_\xi(x_0)$ だから $\hat{R}^{E\cap D}k_\xi(x_0) < k_\xi(x_0)$，すなわち E は ξ において thin，これで証明された。

Corollary 4.2. potential ($*$-potential)

$$p = \int p_y\, m(dy) \quad \left(p^* = \int p^*_x\, m^*(dx) \right)$$

に対し

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\alpha) \equiv *\text{fine}\lim_{x\to\alpha} \frac{p}{p_{x_0}}(x) = \int k^*_\alpha(y)\, m(dy),\quad \alpha \in \Delta^*_1.$$

$$\left(\frac{\partial p^*}{\partial n}(\xi) \equiv \text{fine}\lim_{y\to\xi} \frac{p^*(y)}{p_y(x_0)} = \int k_\xi(x)\, m^*(dx),\quad \xi \in \Delta_1 \right)$$

となる。

$*$-potential $p^* = \int p^*_x\, m^*(dx)$ と X 上の harmonic 函数 $h \geqq 0$，$h = \int_{\Delta_1} k_\xi\, \mu(d\xi)$ に対し上の系と Fubini の定理より

$$\int h(x)\, m^*(dx) = \int_{\Delta_1} \frac{\partial p^*}{\partial n}(\xi)\, \mu(d\xi)$$

が成り立つ。これは Green の公式である。これと双対に $h^* \in \mathcal{H}^*_+(X)$，potential p に対し

$$\int h^*(x)\, m(dx) = \int_{\Delta^*_1} \frac{\partial p}{\partial n}(\alpha)\, \mu^*(d\alpha)$$

が成り立つ。